Vektor-Geometrie

für die Mittelstufe (Sekundarstufe 1)

Teil 1

Grundlagen

Für moderne Geometrie-Kurse am Gymnasium

und für Realschulen in Bayern!
(Prüfungsstoff!)

Auch in der Oberstufe zur Ergänzung einzusetzen,
hier wird nur zweidimensional gerechnet !
Dafür wird vieles anschaulicher !

Datei Nr. 11811

Friedrich W. Buckel

Stand 12. Juli 2008

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text enthält vor allem viel Lesestoff. **Wer Vektorrechnung betreiben will, muss sie verstanden haben**. Daher habe ich versucht, mit vielen Erklärungen und Beispielen anschaulich zu machen, was hinter dem Begriff Vektor, hinter der Addition und Subtraktion von Vektoren steckt usw. Rechen- und Konstruktionsbeispiele gibt es daneben genügend.

Ein Problem könnte auftreten, nämlich dass der Stoff im Unterricht ganz anders dargeboten worden ist. Dann empfehle ich dennoch sich die Mühe zu machen, und diese Vektorgeschichte zu lesen. Ein anderer Gesichtspunkt hilft vielleicht, manche Verständnisprobleme zu beseitigen.

Es gibt für die Vektorrechnung auch unterschiedliche Schreibweisen. Beispielsweise wird in Bayern die Vektoraddition so geschrieben $\vec{u} \oplus \vec{v}$, was durchaus sinnvoll ist, denn eine Vektoraddition ist doch etwas anderes als eine Zahlenaddition, auch wenn diese dazu verwendet wird. In den meisten Bundesländern und Büchern ist man da etwas großzügiger und verwendet – nachdem geklärt ist, dass die Vektoraddition etwas Neues ist – dennoch die Schreibweise der Zahlenaddition: $\vec{u} + \vec{v}$. Ich werde dies auch so machen, der Mehrheit folgend. Dies sollte keinem Schüler Verständnisprobleme bereiten.
Ich werde später in Musteraufgaben für die bayerische Realschulabschlussprüfung ausnahmsweise doch die Notation $\vec{u} \oplus \vec{v}$ verwenden, aber nur dort, weil diese Aufgaben und Lösungen in erster Linie für diese Zielgruppe geschrieben werden.

Ein Problem ist es, wie viel der dreidimensionalen Vektorgeometrie (siehe Band 6 der **INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK**) auf die Mittelstufe zu übertragen ist. Ich biete hier eine sinnvolle Auswahl an. Sollte eine Klasse irgendwo ein wenig mehr behandeln, sollte man eben in Band 6 nachlesen. Hier also das Wichtigste für zweidimensionale Vektorgeometrie.

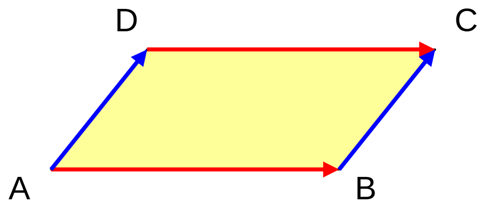
Inhalt

GRUNDAUFGABE 1

Beweise, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist:

$$A(-1|-1),\ B(7|0),\ C(3|7)\ \text{und}\ D(-5|6).$$

Lösung



Gemäß der Skizze berechnen wir:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$$

Weil $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt $AB \parallel DC$.
und $\overline{AB} = \overline{DC}$, d.h.
ABCD ist ein Parallelogramm.

oder

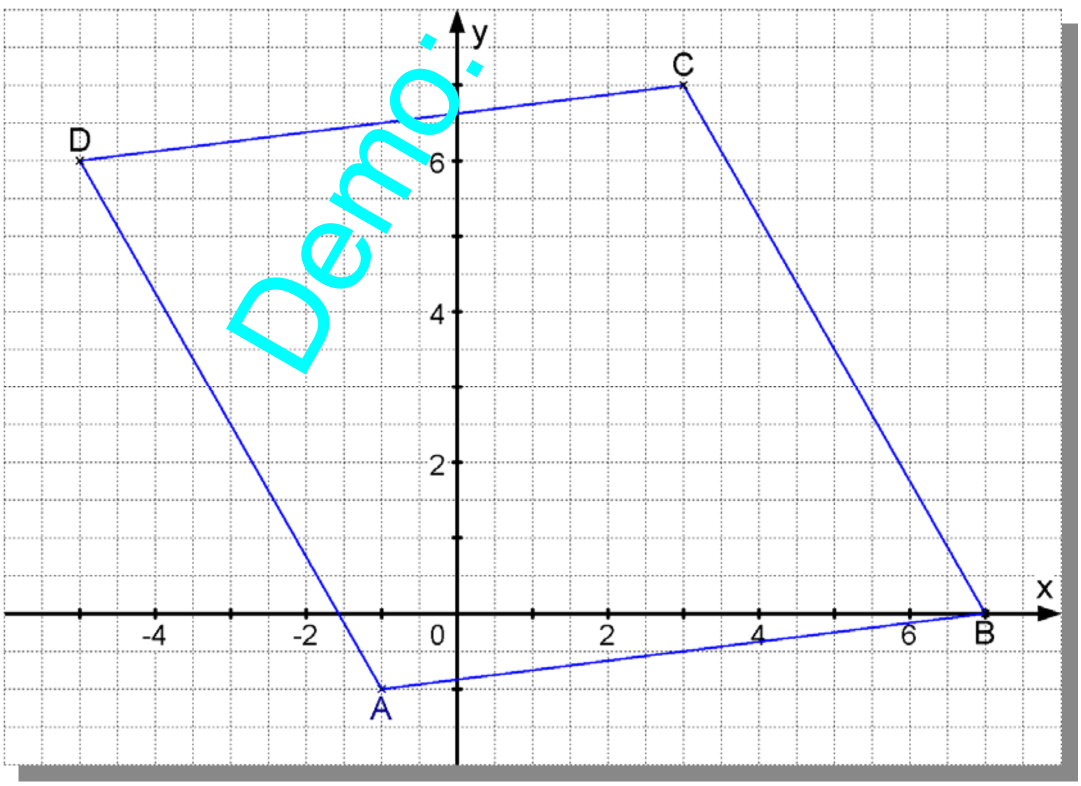
$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$$

Weil $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ gilt $BC \parallel AD$
und $\overline{BC} = \overline{DA}$, d.h.
ABCD ist ein Parallelogramm.

Wenn zwei Gegenseiten parallel und gleich lang sind, liegt ein Parallelogramm vor.
Hier die zugehörige Abbildung:

Hinweis: Es genügt immer bereits ein solcher Nachweis: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oder $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$!



Hinweis: Wer schon Streckenlängen berechnen kann, der findet heraus, dass die Seiten AB und BC gleich lang sind. Damit sind alle 4 Seiten gleich lang und es liegt eine Raute vor.

GRUNDAUFGABE 2

Gegeben sind drei Punkte $A(-2|8)$, $B(-4|-3)$ und $C(6|-8)$.
Bestimme den Punkt D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

Lösung

Wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, dann liegt ein Parallelogramm vor.

Bedingung also für D: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d.h.

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \quad !$$

Umstellen nach $\vec{d}$: $\boxed{\vec{d} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}}$

Berechnung: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+4-2 \\ -8+3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $D(8|3)$

Genauso geht man vor, wenn ein anderer der vier Parallelogrammpunkte gesucht ist.

Aufgabe 17

a) Beweise durch Rechnung, dass ABCD mit
$A(-3|-3)$; $B(4|1)$; $C(5|9)$; $D(-2|5)$
ein Parallelogramm ist. (Anleitung: Überprüfe die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$.)
Zeichne auch das Parallelogramm!

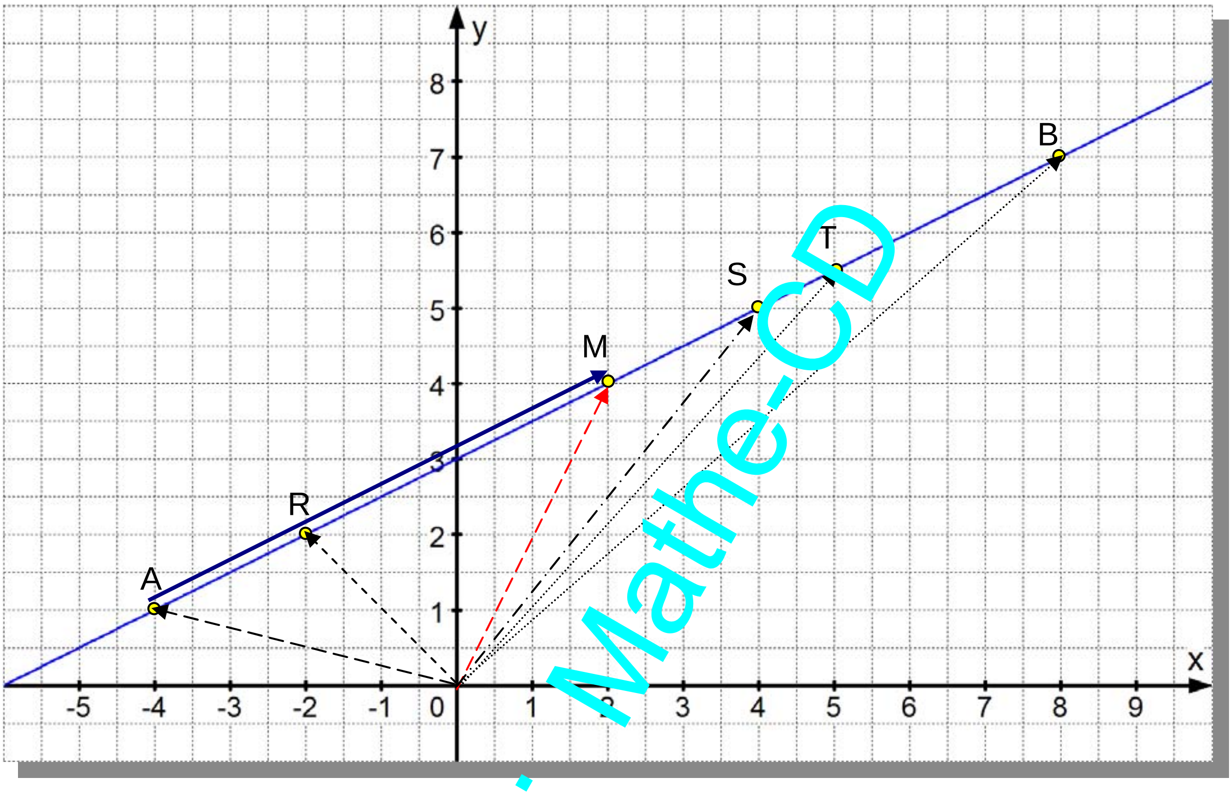
b) Gegeben ist ein Dreieck ABC durch $A(3|-2)$; $B(5|6)$; $C(-3|4)$.
Bestimme D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

c) Gegeben ist ein Dreieck ABC durch $A(-2|-3)$; $C(6|1)$; $D(1|4)$.
Bestimme B so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

§ 6 Punkte auf einer Strecke

6.1 Besondere Teilungspunkte einer Beispielstrecke

Die Abbildung zeigt die Gerade durch A und B mit $A(-4|1)$ und $B(8|7)$.
Ich zeige jetzt, wie man bestimmte Punkte der Strecke einfach berechnen kann.



1. Mittelpunkt einer Strecke AB - Eine Wanderungsgeschichte ....

Wir betreiben Vektorrechnung, d.h. wir rechnen nur mit Vektoren. Wenn wir somit einen Punkt berechnen wollen, dann suchen wir seinen Ortsvektor. Dazu wurden diese Pfeile (die vom Ursprung aus zum gesuchten Punkt zeigen) eingeführt.

Wir haben gegeben: $A(-4|1)$, also $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $B(8|7)$, also $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Wir suchen M, also $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$. Wie man aus der Abbildung erkennen kann, suchen wir also einen Weg (Pfeil), der uns von O (Ursprung) zu M führt. Da wir den Pfeil noch nicht kennen, machen wir einen Umweg über den bekannten Punkt A.
Wir gehen also von O nach A und dann in Richtung B weiter. Diese Richtung wird durch den Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ bestimmt. Wir können diesen sogenannten Richtungsvektor der Strecke bestimmen: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Nun machen wir in Gedanken eine Wanderung: Wir gehen von O nach A und dann nach B. Dies geschieht durch diese Vektoraddition: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$
Das Ergebnis ist der Ortsvektor von B, wir kamen also von O über A nach B.

Wir wollten aber gar nicht so weit gehen, sondern in M halt machen, also auf halber Strecke zwischen A und B. Dann benötigen wir von A aus auch nur die Hälfte des Vektors $\vec{u}$. Und das ist die zugehörige Rechnung:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

Das ist der Pfeil, der von O nach M zeigt, gebastelt aus den Pfeilen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{AM}$, der ja als $\tfrac{1}{2}\vec{u}$ bekannt war. Daher hat M die Koordinaten $M(2\,|\,4)$!

Der Blick auf die Abbildung bestätigt das Ergebnis. Aber wer wird denn daran zweifeln ??? :-)

Nun führen wir diese Rechnung ganz allgemein durch:

Wir benötigen dazu den Punkt $A(a_1\,|\,a_2)$ und den Endpunkt $B(b_1\,|\,b_2)$.
Aus diesen berechnen wir den Richtungsvektor

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1 - a_1\\b_2 - a_2\end{pmatrix}$$

Von ihm benötigen wir die Hälfte, um von O über A nach M zu kommen:

$$\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

Die rechte Seite können wir noch deutlich vereinfachen:

$$\vec{m} = \vec{a} + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{a} = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

MERKE:

Den Ortsvektor des Mittelpunkts einer Strecke berechnet man durch $\vec{m} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Nun verwende ich noch die allgemeinen Koordinaten und rechne weiter:

$$\vec{m} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1 + b_1\\a_2 + b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a_1+b_1}{2}\\ \frac{a_2+b_2}{2}\end{pmatrix}$$

Also gilt für die 1. Koordinate des Mittelpunkts: $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

und für die zweite: $m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Aufgabe 18 Berechne den Mittelpunkt der Strecke $A(-4\,|\,9)$; $B(8\,|\,4)$.

Lösung

Gegeben war die Strecke AB durch $A(-4\,|\,9)$ und $B(8\,|\,4)$.

Die vektorielle Lösung geht so:

$$\vec{m} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-4\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6{,}5\end{pmatrix} \quad \text{also ist} \quad M(2\,|\,6{,}5).$$

Die Lösung mit den Koordinatenformeln geht so:

$$m_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{-4+8}{2} = \frac{4}{2} = 2, \qquad m_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{9+4}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

Daraus folgt genauso $M(2\,|\,6{,}5)$.

Teilungsverhältnisse auf einer Strecke

Ein Mittelpunkt halbiert eine Strecke, d.h. beide Teilstrecken haben die gleiche Länge. Man sagt daher auch: M teilt AB im Verhältnis 1 : 1. Oder man gibt dieses Verhältnis als Bruch an. Diesen nennt man dann das Teilverhältnis $r = \frac{1}{1} = 1$.

In unserer Abbildung auf Seite 35 sind weitere Punkte auf der Strecke AB eingezeichnet. Beginnen wir mit dem Punkt $R(-2\,|\,2)$.

Musterbeispiel 1: In welchem Verhältnis teilt R die Strecke AB?

Gegeben sind $R(-2\,|\,2)$, $A(-4\,|\,1)$ und $B(8\,|\,7)$.

Musterlösung:

Da R auf der Strecke AB liegt, muss der Vektor $\overrightarrow{AR}$ ein Vielfaches (eigentlich ein Bruchteil) des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ sein.

Da wir es noch nicht genau wissen, schreiben wir einmal: das k-fache.

Wir fragen: Ist $\overrightarrow{AR} = k\cdot\overrightarrow{AB}$?

Mit Koordinaten: Es ist $\overrightarrow{AR} = \vec{r}-\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

und $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$

Aus dem Ansatz $\overrightarrow{AR} = k\cdot\overrightarrow{AB}$ folgt $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$

und dies wird richtig für $k = \frac{1}{6}$.

Also ist $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB}$. Folglich teilt R AB im Verhältnis 1 : 5, denn bis R haben wir $\frac{1}{6}$ und dahinter $\frac{5}{6}$ der Strecke AB.

Musterbeispiel 2: In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AB?

Gegeben sind $S(4|5)$, $A(-4|1)$ und $B(8|7)$.

Musterlösung:

Da S auf der Strecke AB liegt, muss der Vektor $\overrightarrow{AS}$ ein Vielfaches (eigentlich ein Bruchteil) des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ sein.

Ansatz: $\overrightarrow{AS} = z \cdot \overrightarrow{AB}$

Es ist $\overrightarrow{AS} = \vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Und es ist $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

Also folgt: $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

Dahinter stecken diesen beiden Gleichungen: $\begin{Bmatrix} 8 = 12 \cdot z \\ 4 = 6 \cdot z \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} z = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$

Beide Koordinatengleichungen werden mit $z = \frac{2}{3}$ gelöst.

Ergebnis: Es ist $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$.
Folglich teilt S die Strecke AB im Verhältnis 2 : 1, denn links von S liegen $\frac{2}{3}$ und rechts davon $\frac{1}{3}$ der Strecke AB.

Musterbeispiel 3 In welchem Verhältnis teilt T die Strecke AB?

Gegeben sind $T(5|5{,}5)$, $A(-4|1)$ und $B(8|7)$.

Musterlösung:

Es ist $\overrightarrow{AT} = \vec{t} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

Ansatz: $\overrightarrow{AT} = x \cdot \overrightarrow{AB}$ d.h. $\begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 9 = 12 \cdot x \\ 4{,}5 = 6 \cdot x \end{Bmatrix}$

Die 1. Gleichung führt auf $x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, die zweite auf $x = \frac{4{,}5}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Also gilt eindeutig $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Daher teilt T die Strecke AB im Verhältnis 3 : 1,

denn links von T liegen $\frac{3}{4}$ und folglich rechts davon $\frac{1}{4}$ von AB.

6.2 Rechenverfahren zu Teilungspunkten

Es gibt zwei Grundaufgaben:
1. Man hat einen Teilungspunkt gegeben und fragt nach dem Teilverhältnis.
2. Man sucht den Teilungspunkt zu einem gegebenen Teilverhältnis.

1. Methode. Teilverhältnis berechnen

Gegeben seien die Endpunkte A und B einer Strecke und ein Punkt T auf der Strecke.

Dann gilt $\boxed{\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB}}$.

Berechnet man die Vektoren $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{AB}$, dann stellt diese Gleichung eine System mit 2 Gleichungen für die Variable k dar. Gibt es eine eindeutige Lösung, dann liegt T auf der Strecke und man kennt das Teilverhältnis.

Gibt es keine eindeutige Lösung, dann liegt T nicht auf AB und ist somit auch kein Teilungspunkt.

Musterbeispiel 4

Gegeben seien die Punkte $A(-5|-3)$; $B(1|-6)$ und $T(-3|-4)$.
Berechne das Teilverhältnis von T zu AB.

Fortsetzung auf der CD.